

# 推箱子游戏与数学文化

杨超

广东外语外贸大学

数学与统计学院

第十一届全国数学文化论坛学术会议

2022年7月30日

河南大学 开封

2022年4月28日，在中国数学会数学教育分会首届学术年会上，汤涛院士作大会报告《数学体验馆与数学教育》，以北师香港浸会大学的数学体验馆的实践，全面阐述了数学体验馆的建设。

2021年，第十届全国数学文化论坛学术会议上，厦门大学林亚南教授向大家展示了厦门大学“智力玩具与数学”博物馆收藏的数千件智力玩具中的一部分，令人大开眼界。

# 报告内容

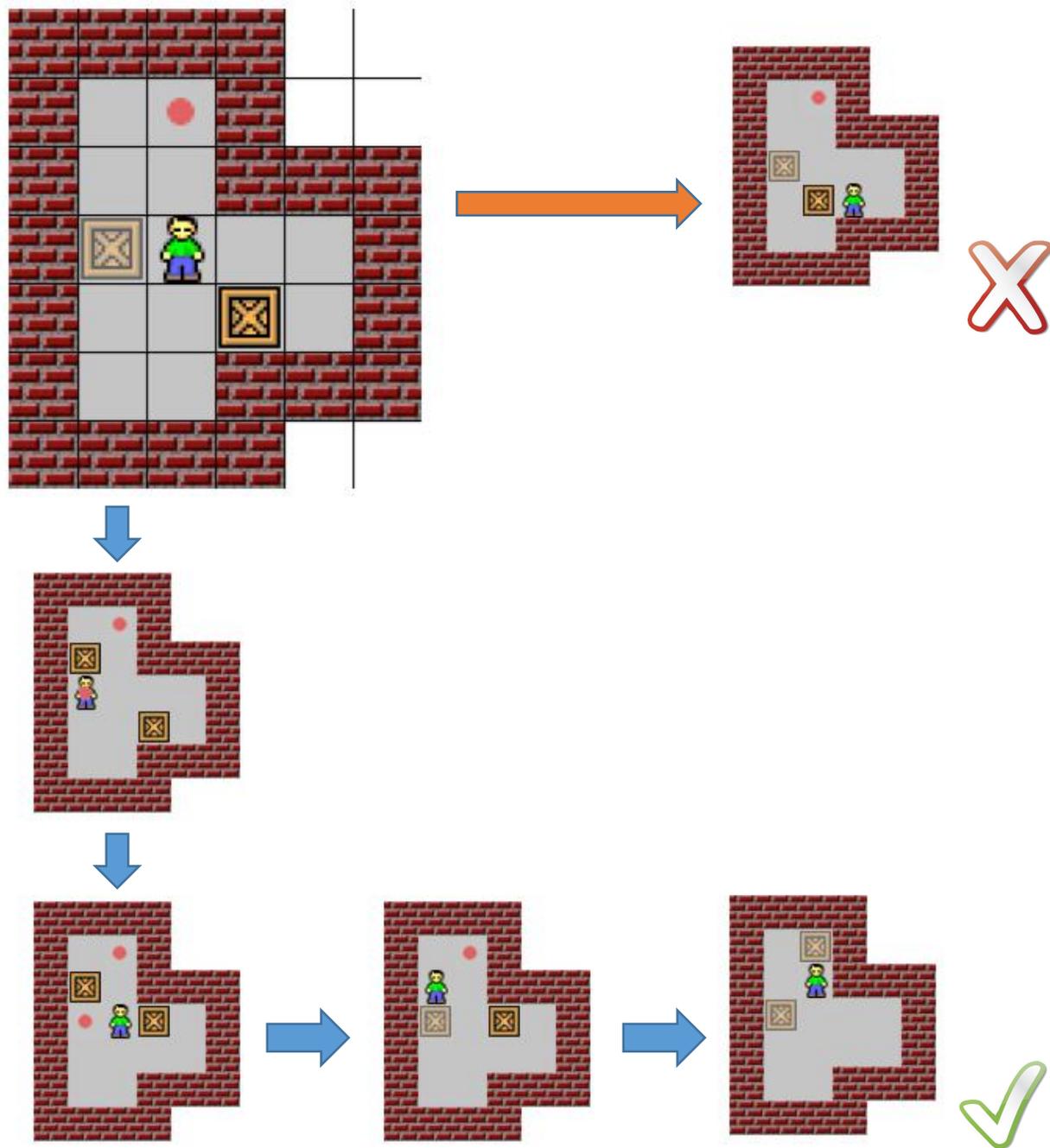
- 一、推箱子的游戏规则与历史
- 二、菲尔兹奖得主与推箱子
- 三、举办在线推箱子比赛的介绍
- 四、推箱子的计算复杂度与关卡多样化
- 五、推箱子与人工智能

# 1 推箱子的游戏规则

在二维的网格地图里，有一个仓库管理员，若干个箱子，以及与箱子数目相等的目标点。

仓库管理员可以自由移动，只能推箱子，不能拉箱子。并且一次只能推动一个箱子。

过关的要求：把所有箱子都推到目标点。



# 推箱子的起源

推箱子是伴随着个人电脑的诞生而出现的。

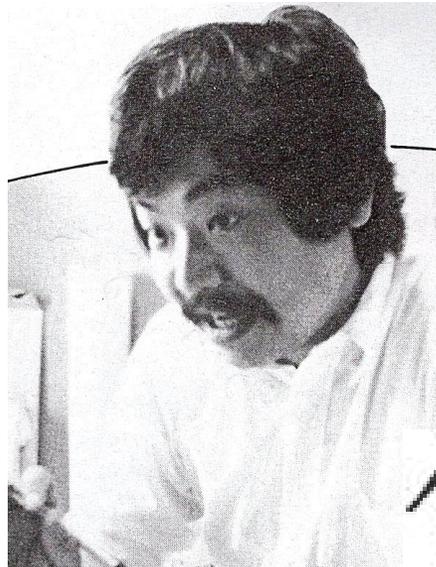
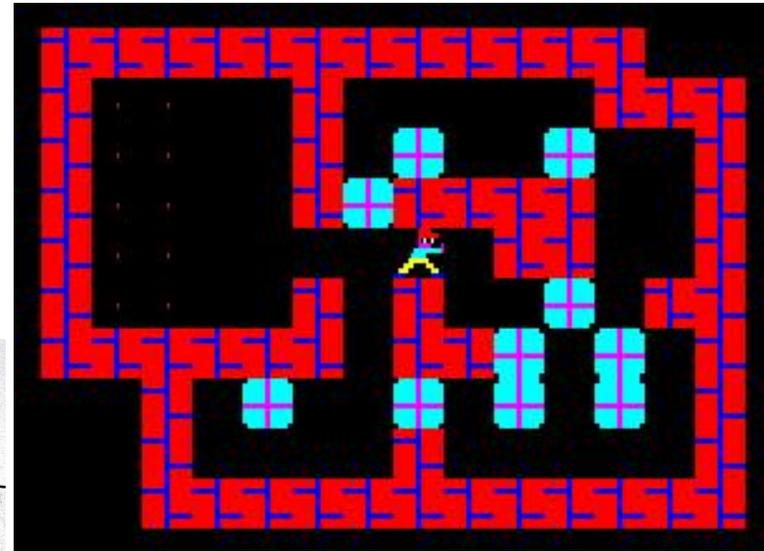
日本人**今林宏行** (いまばやし ひろゆき) 创造了这个游戏，并以《**仓库番**》为名从1982年开始发行销售。“仓库番”是日语汉字，意为仓库看守，用假名来写是“そうこばん”。按照假名和罗马字的转换规则，英文应写为 Soukoban . 但是不知何种原因，《仓库番》游戏在欧美发行时少了一个字母 u，拼写为 **Sokoban**，就一直沿用下来了。

因仓库番的说法不符合中文习惯，我们直接用“推箱子”来称呼这个游戏。

Sokoban

倉庫番

SINCE 1982



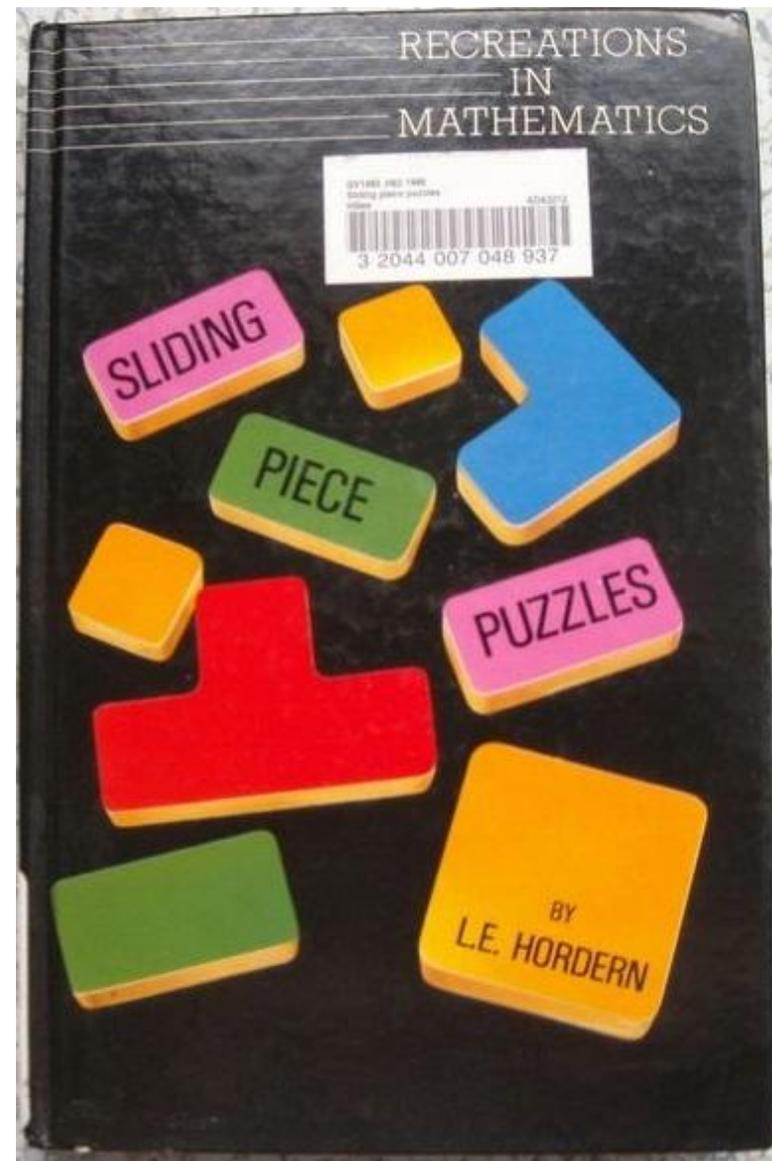
今林宏行

# 推箱子是电子形式的智力玩具的代表

1986年出版的《Sliding Piece Puzzles》一书用整整一章（第10章）介绍当时刚出现不久的推箱子游戏，显然是把推箱子视为滑块类游戏的一种新的变化。从滑块类到推箱子游戏，可谓青出于蓝。

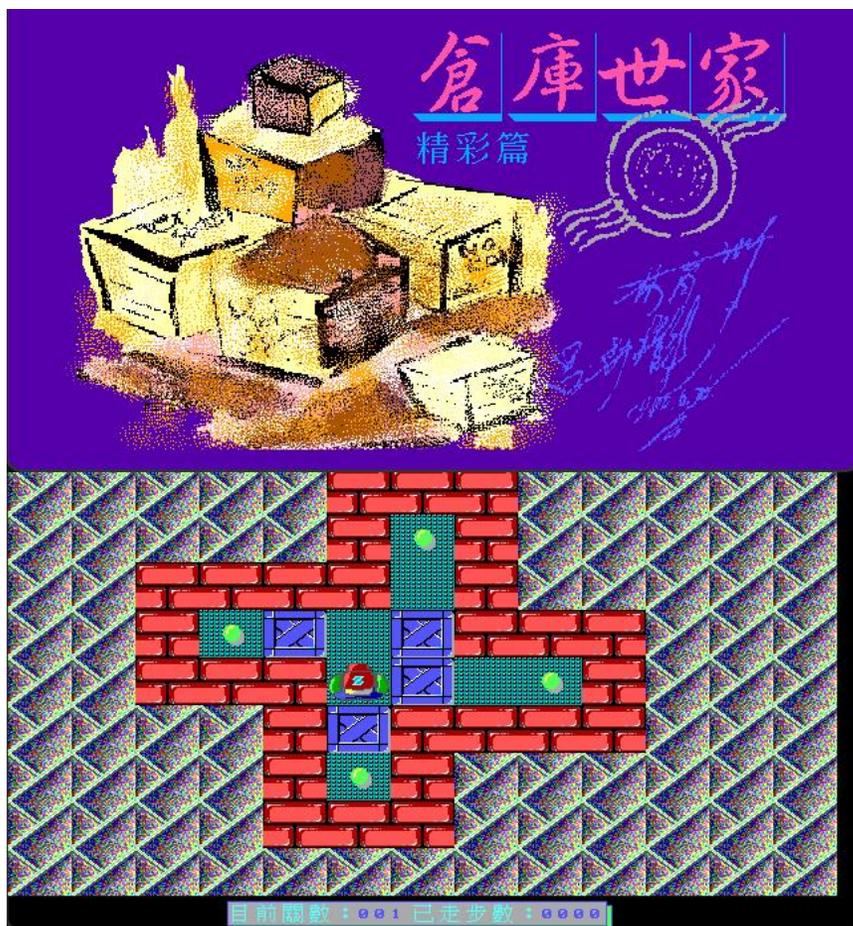
## Contents

1. <b>About the puzzles</b>	1
The '15' Puzzle. Scope. Difficulty ratings. Taxonomy. Identification. Moves. Solutions. Hints and tips. Parity. Making the puzzles	
2. <b>History of the sliding block puzzle</b>	18
'15' and '14-15' puzzles. Other puzzles	
3. <b>Random arrangement sliding block puzzles, A1-A10</b>	31
4. <b>Sliding block puzzles with uniform pieces, B1-B60</b>	39
5. <b>Sliding block puzzles with rectangular pieces, C1-C76</b>	68
6. <b>Sliding block puzzles with non-convex pieces, D1-D50</b>	105
7. <b>Restricted route sliding block puzzles, E1-E35</b>	120
8. <b>Sliding block puzzles with special shaped pieces or where rotation is allowed, F1-F13</b>	146
9. <b>Three-dimensional sliding block puzzles, G1-G5</b>	156
10. <b>Soko (warehouse) puzzles, H1-H10</b>	161
11. <b>Railway shunting puzzles, J1-J13</b>	167
<b>Solutions</b>	178
<b>Appendix A: A mathematical note</b> by David Singmaster	231
<b>Appendix B: A List of patents</b>	233
<b>Appendix C: References and bibliography</b>	238
<b>Index</b>	245



# 推箱子游戏在中国的发展

最晚在90年代初，推箱子在中国就已经有很多人玩了。早期接触到推箱子游戏的可能是在DOS系统大宇公司的《仓库世家》或是“文曲星”（称为《搬运工》）等电子词典上。现在更多是在智能手机上见到推箱子游戏。

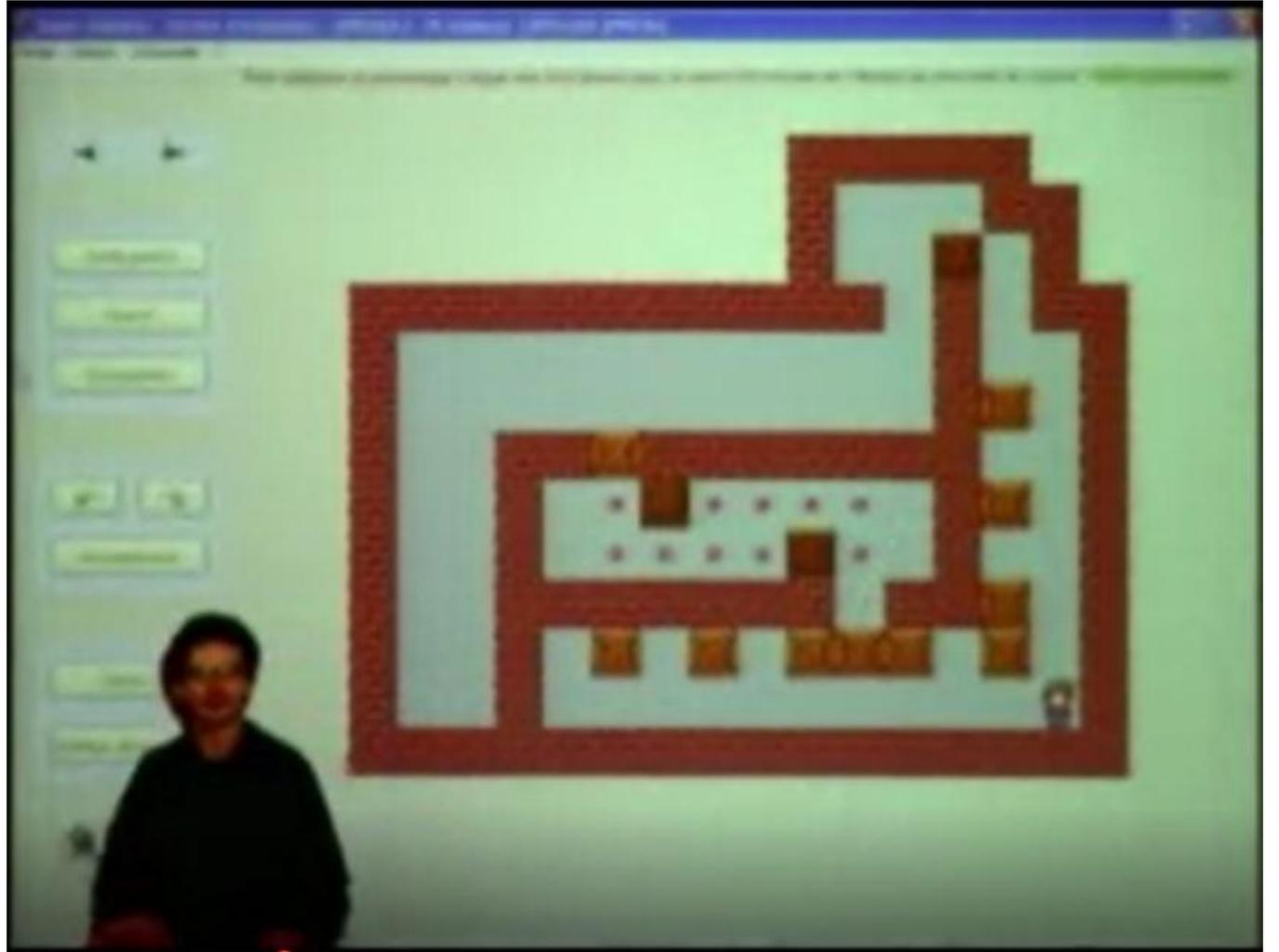


# 推箱子的魅力

简单的规则、复杂的变化。

## 2 菲尔兹奖得主 Wendelin Werner

法国数学家 Wendelin Werner，2006年以概率论和布朗运动等方面的工作获得菲尔兹奖。他曾在2009年8月一个纪念 Oded Schramm 的会议上回忆了他和 Oded 一起玩推箱子游戏的经历。



# 3 在线推箱子比赛

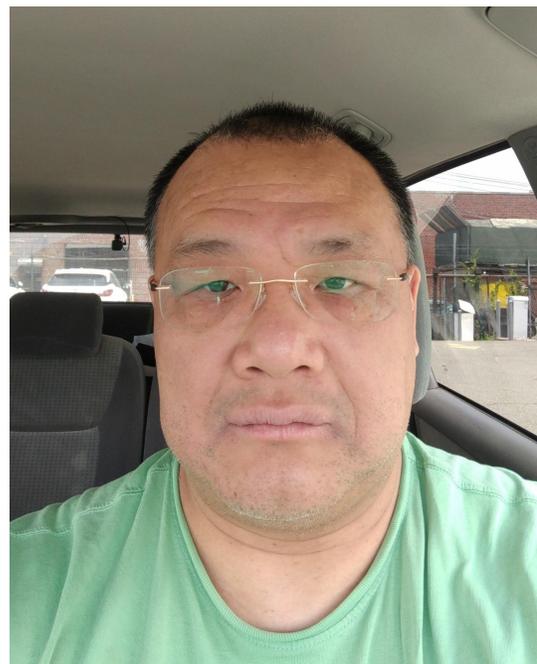
我于2009年4月发起在线推箱子比赛，每月一期，至今已经连续举办了十三年共165期。

比赛通过网站 <http://sokoban.cn> 发布比赛关卡，参赛者各自解关后，把答案导出提交到比赛的网站。

每一期我们同时发布三个关卡，分为难、中、易三个等级。



## 安排比赛关卡的两位总主编



Anian Wu, 美籍华人，软件工程师。



王毅琨，68年生，辽宁大连人，93年开始玩推箱子。QQ 推箱子群 92017135 群主。

# 参赛者来自世界各地

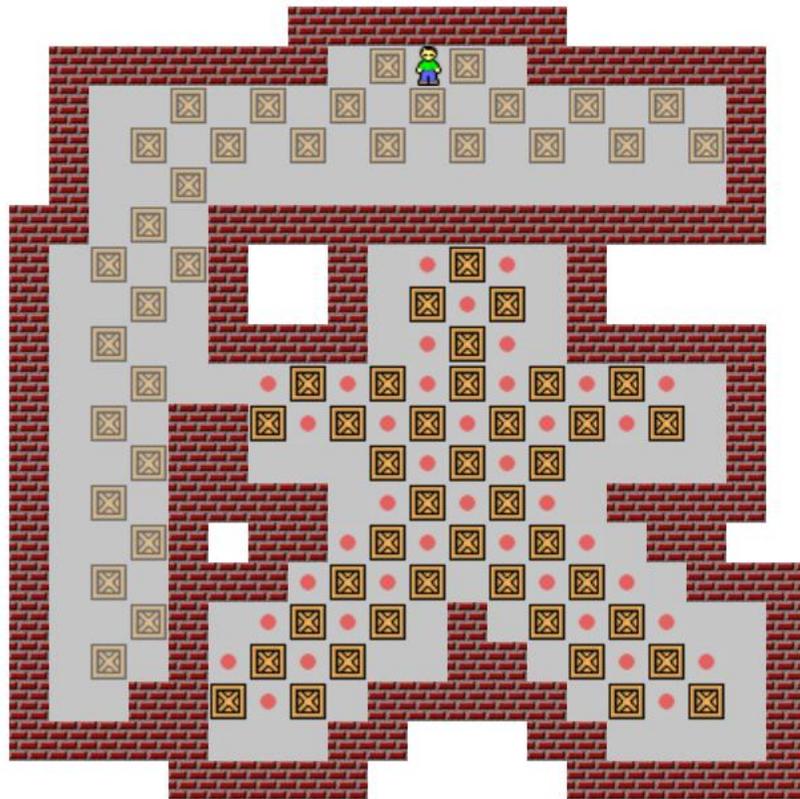
(For the **164th** competition)

Order	Time	ID	Country or Region	#Moves	#Pushes
1	2022-07-01 13:12:42	cjcjc		1355	194
2	2022-07-01 15:50:56	Liu Yi		1225	152
3	2022-07-01 16:31:14	有你永远快乐		1451	282
4	2022-07-01 16:33:20	铁蛋		1447	186
5	2022-07-01 18:44:28	XiBeiTianLang		459	122
6	2022-07-01 21:03:00	Matthias Meger		713	90
7	2022-07-02 13:33:34	闲		1921	272
8	2022-07-02 13:42:07	shamyng		1165	170
9	2022-07-02 16:20:27	abc		1659	210
10	2022-07-02 21:14:07	lyckligdag		715	136
11	2022-07-05 16:31:31	eseger		609	90
12	2022-07-05 16:31:58	eseger		403	124
13	<b>2022-07-06 10:05:22</b>	<b>XiBeiTianLang</b>		<b>373</b>	<b>118</b>
14	<b>2022-07-06 10:05:31</b>	<b>XiBeiTianLang</b>		<b>655</b>	<b>88</b>

参加比赛的选手有来自德国、法国、俄罗斯、印度、西班牙、保加利亚、巴西、阿鲁巴（荷兰）、比利时、捷克、葡萄牙、意大利等十多个国家与地区。

# 2019年10月第128期比赛关卡

2019年10月，在70周年国庆之际，laizhufu 设计了一关《不忘初心》作为比赛关卡。关卡由70个箱子组成，整体形成一个“庆”字。



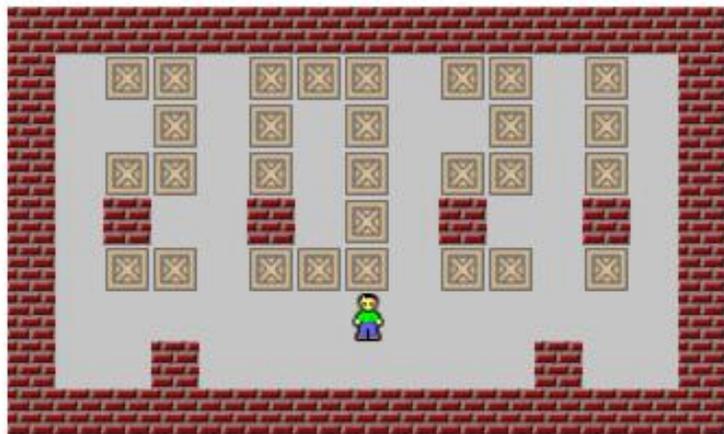
《不忘初心》

作者：laizhufu



laizhufu, 49岁,  
江西南昌人,  
从事财务工作  
20多年。

# 2021年7月第151期比赛关卡 《百年征程》



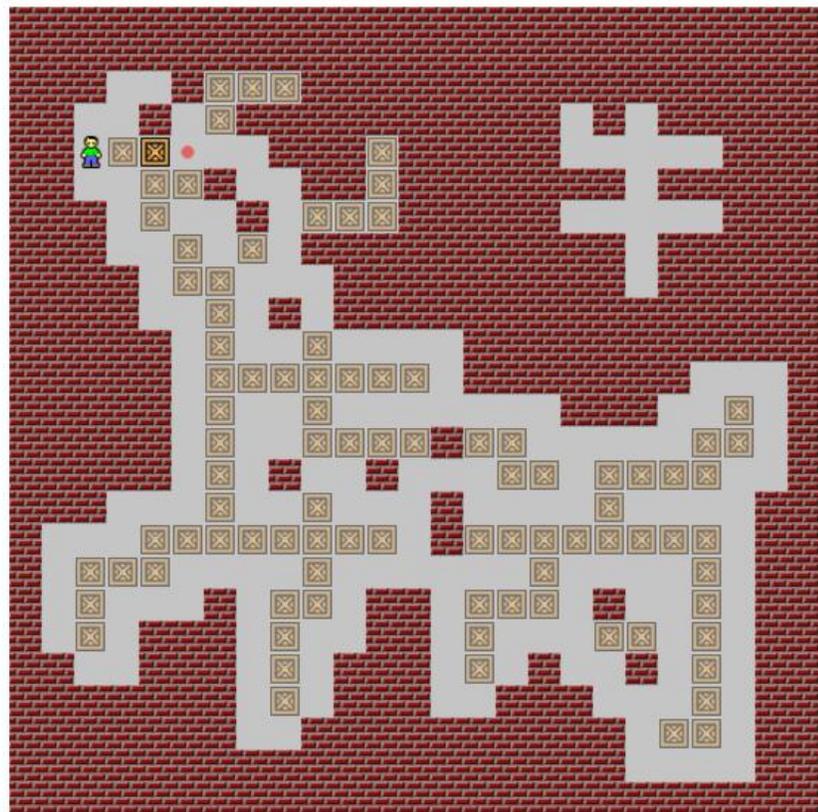
庆祝中国共产党成立100周年  
The 100th Anniversary of the Founding of  
The Communist Party of China

《百年征程》

作者: laizhufu

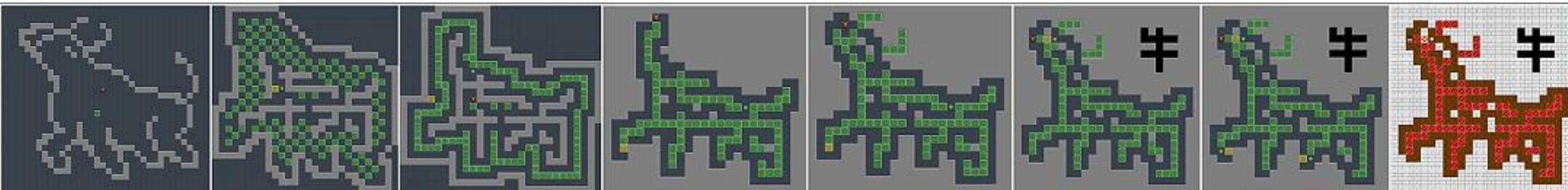
# 2021年3月第147期比赛关卡 《华为·牛转乾坤》

每个关卡都是经过反复打磨而成。



《华为·牛转乾坤》

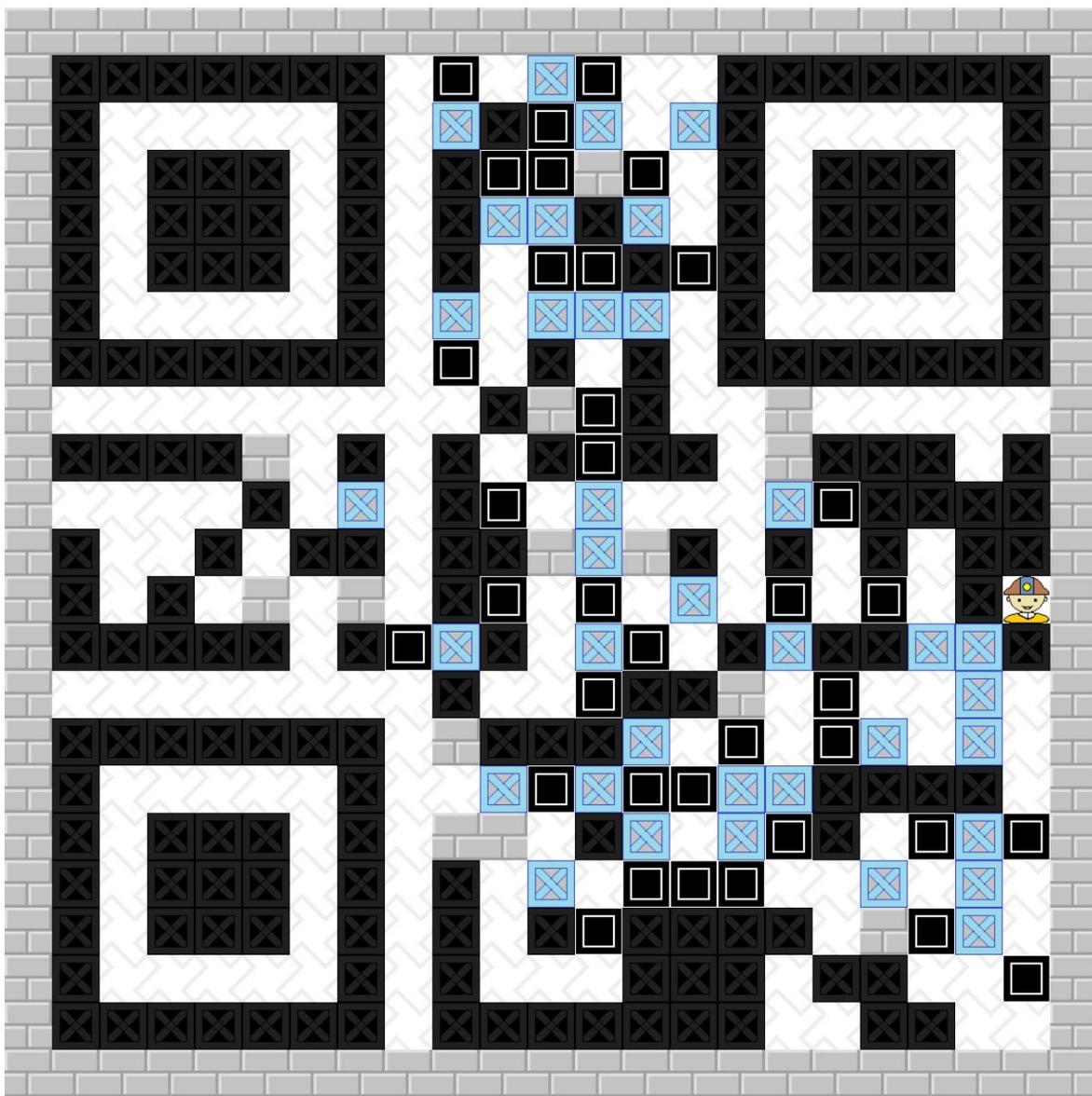
作者：laizhufu



# 2019年3月第121期比赛关卡

这个二维码关卡是比赛网址的编码，可以扫一扫直接打开比赛的网站。

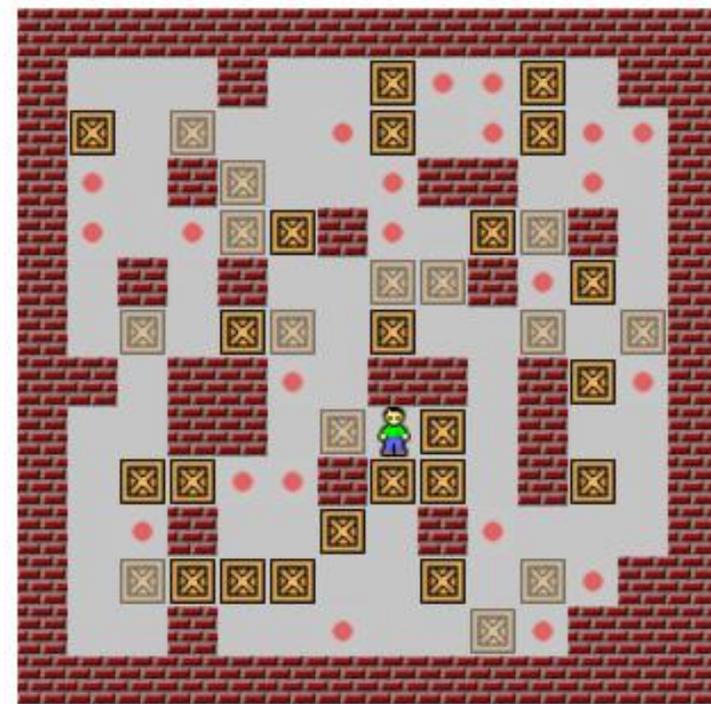
邹永忠先生（曾用名20603）的关卡以布下“战略陷阱”称著，提出“半位奇偶理论”，被认为是“中国推箱子第一人”。



邹永忠，53岁，江苏东台人，经济分析师，曾用名邹咏钟。从事过经济分析及策划、出版编辑等工作。

邹永忠：『我有幸受邀设计十周年的纪念关卡，取名《十年树木》。管仲云：“一年之计，莫如树谷；十年之计，莫如树木；终身之计，莫如树人。”后人提炼为：“十年树木，百年树人。”这句话对推箱子游戏来说，再合适不过了。多种树，才有木材做箱子；多育人，才有人来推箱子。正如这首七律：

十丈青松拔地起。  
年轮写在春天里。  
树经风雨枝迎雪，  
木锯成箱推万里。  
百步穿杨谁折桂，  
年少轻狂世无匹。  
树影斑驳根叶茂，  
人才辈出生不息。』

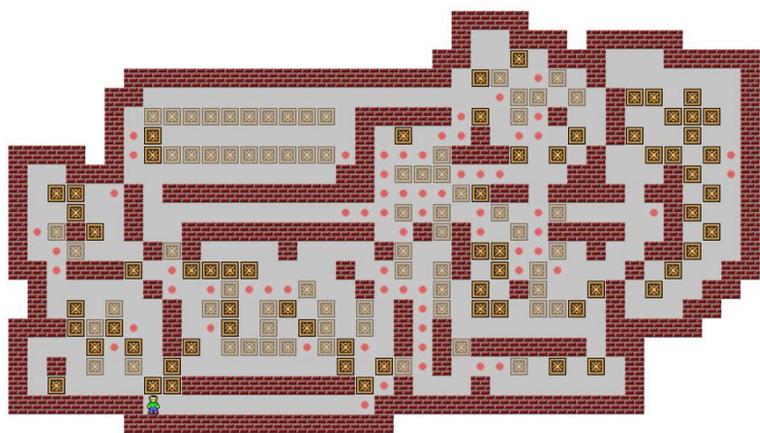


《十年树木》  
作者：邹永忠

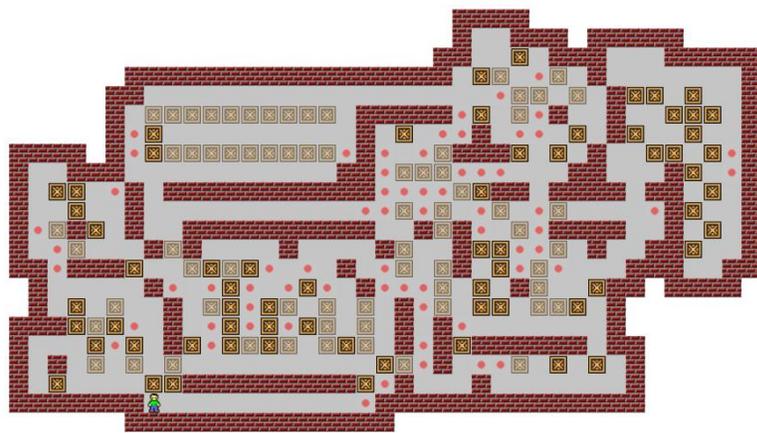
2019年4月  
第122期比赛关卡

# 陈锦超的《我的大学》系列

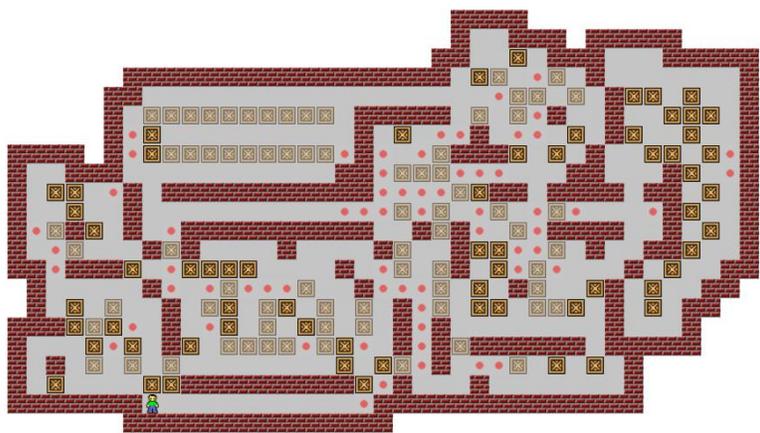
我们的比赛见证了一些新人的成长。《我的大学》系列关卡分别作为第107、110、113、116期的比赛关卡。



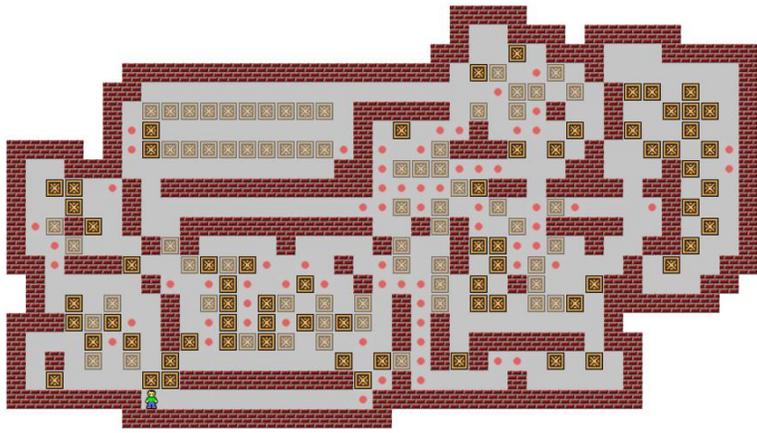
《我的大学之投石问路》



《我的大学之渐入佳境》



《我的大学之学业有成》



《我的大学之路在何方》

陈锦超，27岁，河南洛阳人，网名cjcjc。北京邮电大学理学院研究生，研究方向为复分析和复动力系统。

# 2022年7月第164期比赛关卡

刘泽鸿（网名：xian、闲）是目前我们比赛中涌现出来的年龄最小的高水平选手。

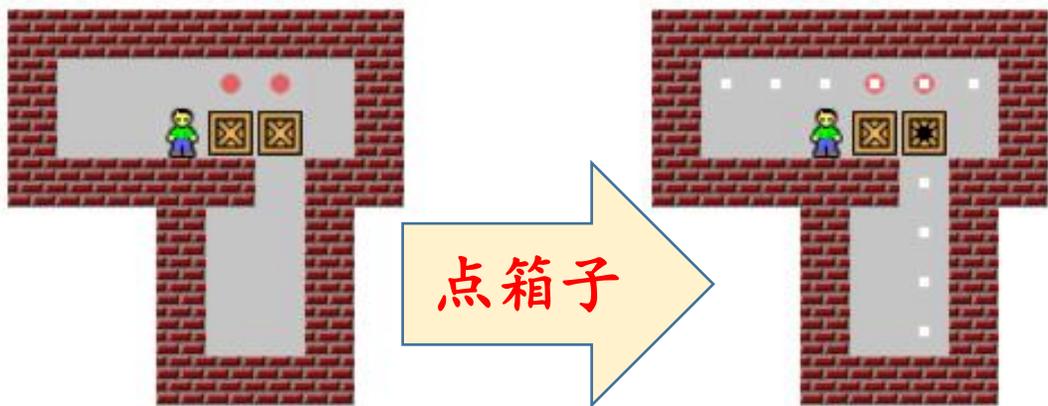


刘泽鸿，23岁，江西赣州人。

# 安卓手机版《推箱快手》

在各类手机应用市场搜索“推箱子”，能找到无数的推箱子APP。但这些APP功能大多过于简陋，无法满足我们比赛的需求。我们的比赛网站提供一款功能强大的安卓系统的APP《推箱快手》，由愉翁开发。

无限撤销、智能寻径（一个箱子的推动）  
逆推（反向思维）、死锁识别（剪枝）、……

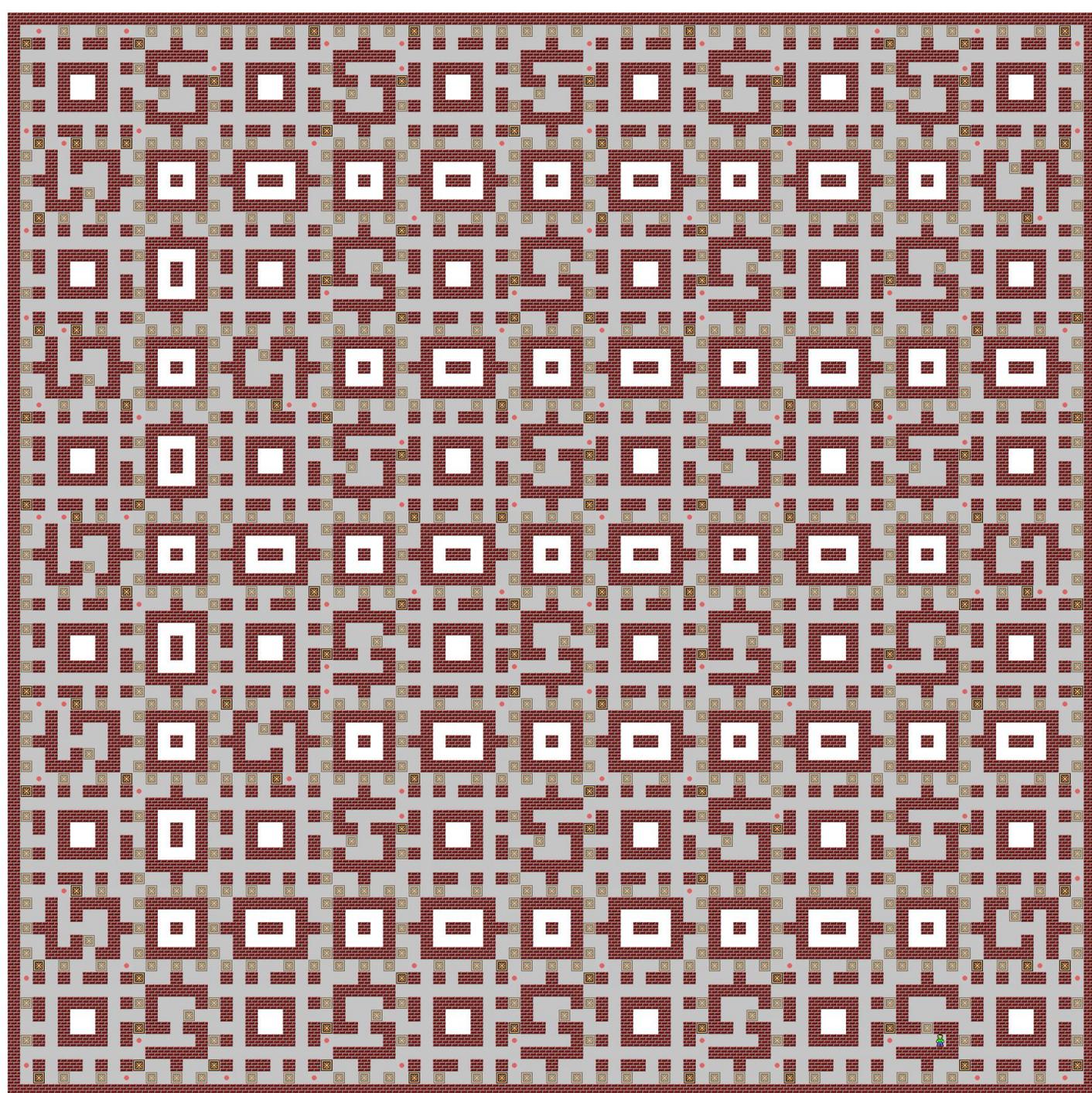
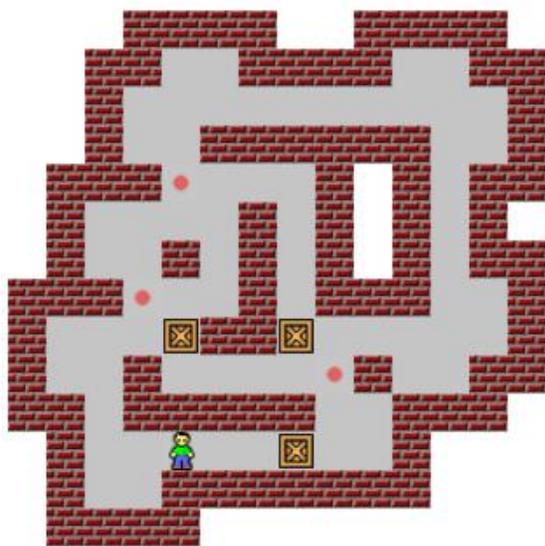


愉翁，1966年生人，八十年代初师范毕业开始任教，上学期间偏好理科，对“玩”有特殊兴趣。八十年代末，进入机关工作，由于工作原因，自学编程，参加全国自学考试取得了计算机专科学历。

# 多样的关卡

因时间有限，以上仅介绍了丰富多彩的推箱子关卡的其中一小部分。右图为 Anian Wu 为庆祝比赛第100期而创作的《百花齐放》关卡。

下图是Zika创作的“臭名昭著”的《三个箱子》关卡。



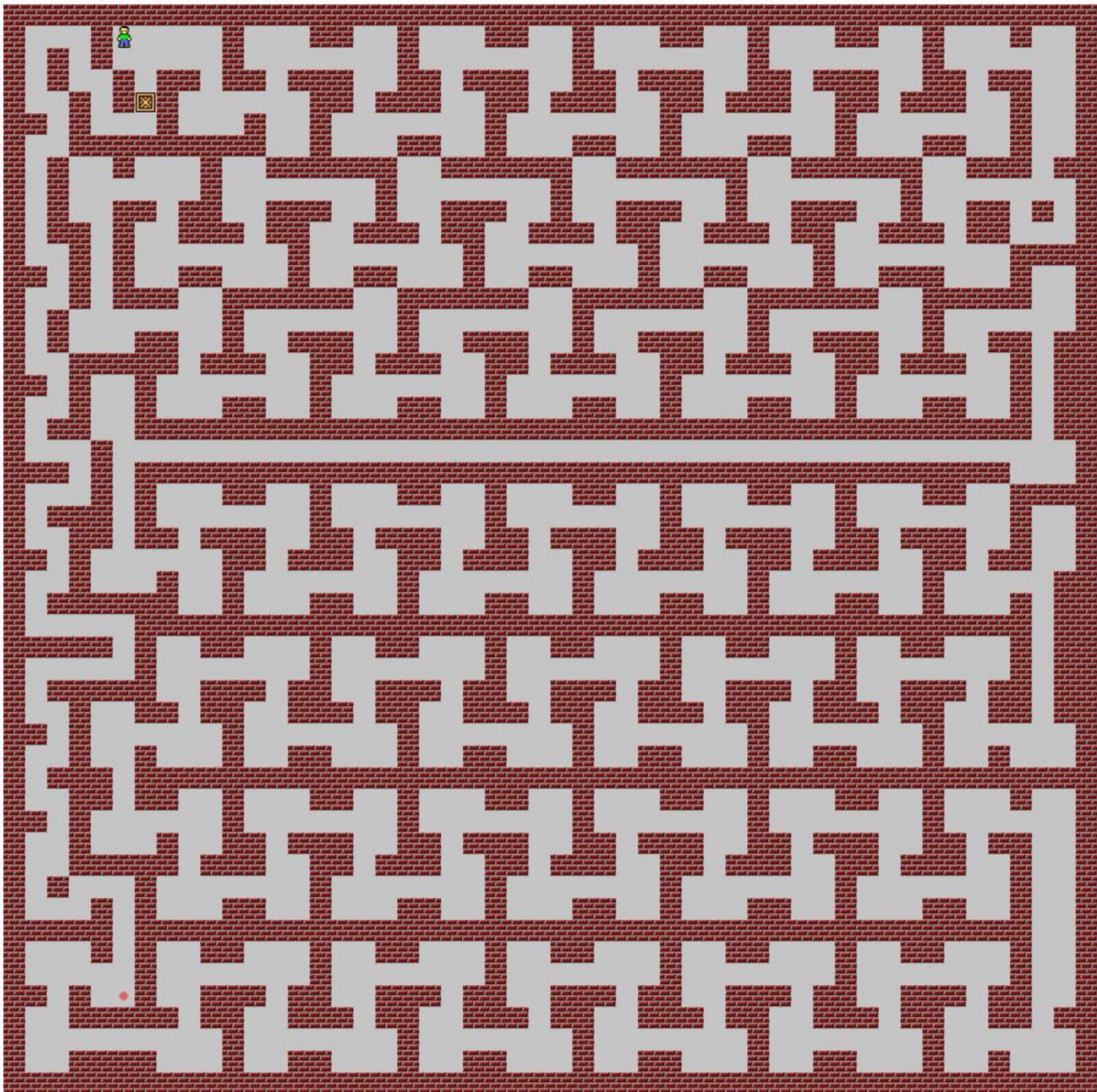
# 《一箭十万》

为了编程方便，很多推箱子软件一度把关卡的大小限制为 $50 \times 50$ ，于是自然提出一个最值问题：在 $50 \times 50$ 大小的关卡里，若只有一个箱子，过关需要的最少步数的最大值是多少？

《一箭十万》

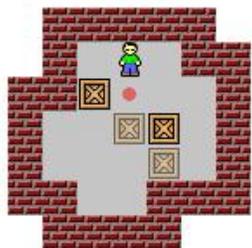
作者：邹永忠

过关需要 102547 步。



# 具有递推关系的系列关卡

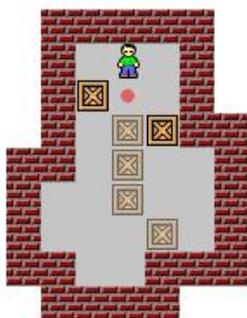
若不限箱子数目，则过关的最少步数是一个天文数字了。



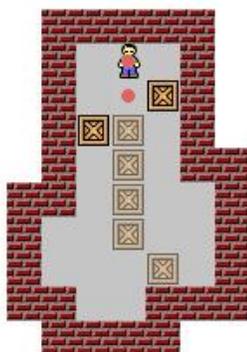
4



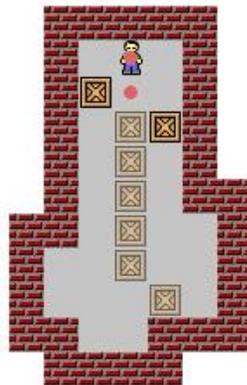
5



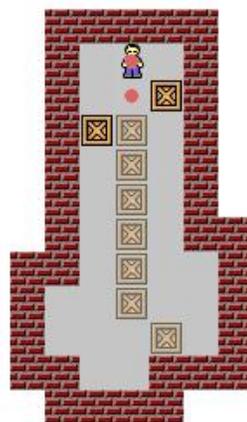
6



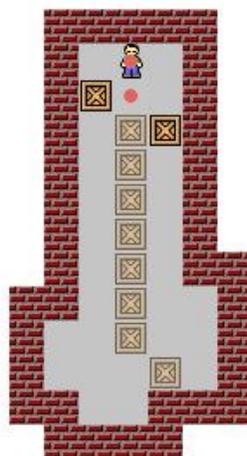
7



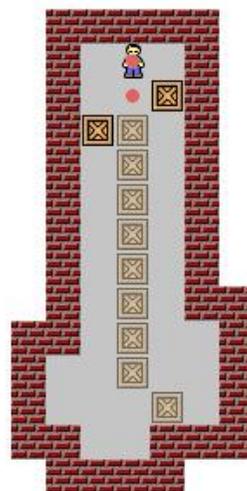
8



9



10



11

若记  $P(n)$  为  $n$  个箱子的关卡过关需要的最少推动步数。则可得递推关系：

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2) + 8.$$

解得：

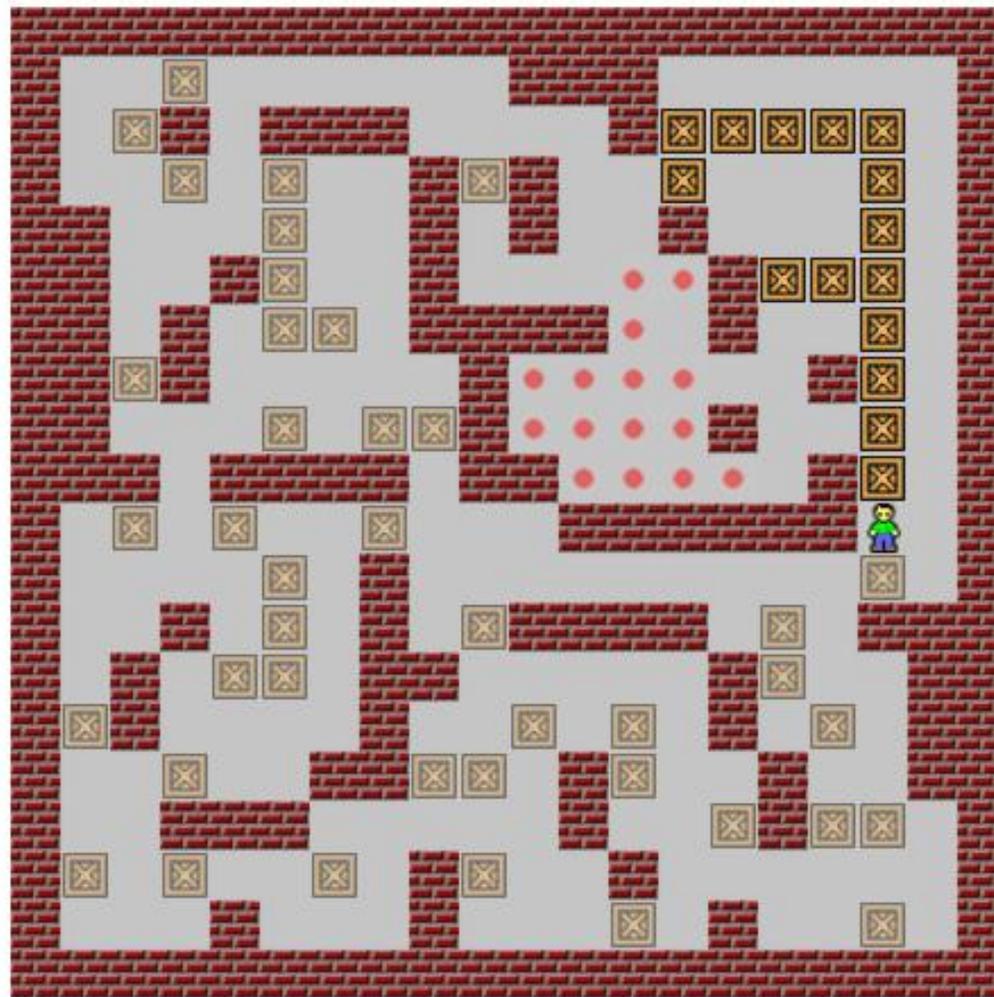
$$P(n) = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 8.$$

# 2016年5月第85期比赛关卡

前面展示的递推型关卡的解关步数以1.618 为底呈指数增长。

能增长得更快吗？

为此，邹永忠设计出了以4为底指数增长的“小单元”。

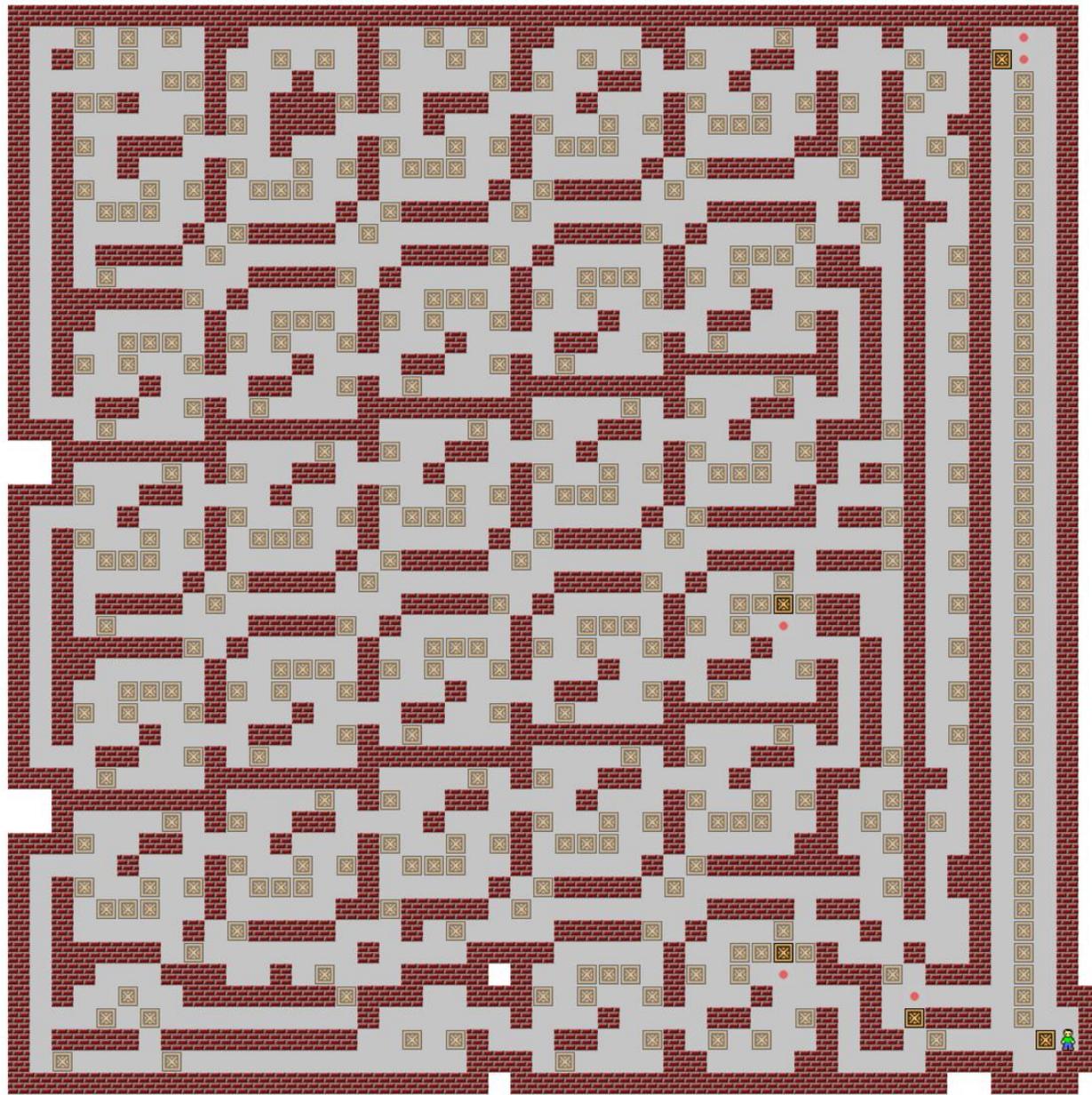


《不乱方寸》  
作者：邹永忠

# 《穰步犹移》

目前，50×50  
大小内过关步  
数的记录由  
《穰步犹移》  
保持，据西北  
天狼分析计算，  
需要约3.7万  
亿亿亿步（即  
3.7穰步）才能  
过关。

穰（壤）=  $10^{28}$



《穰步犹移》

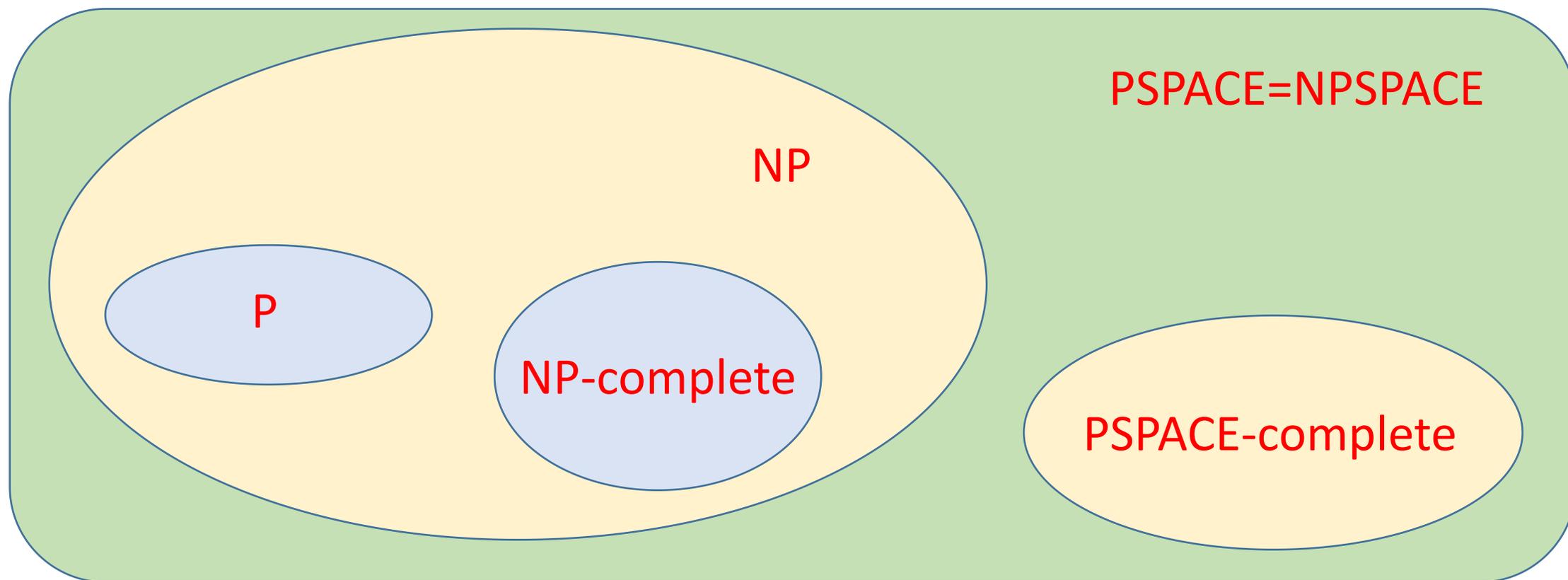
作者：邹永忠、西北天狼



西北天狼，1962年  
5月生，《计算机  
时代》编辑部退休。

## 4 推箱子的计算复杂度

计算复杂度的类 P 和 NP 作为千禧年七大数学问题中的其中一个，为大众所熟知。为了讨论推箱子的计算复杂度，还涉及到另外一个类 PSPACE。



# 数学玩具（游戏）的复杂度对比

P

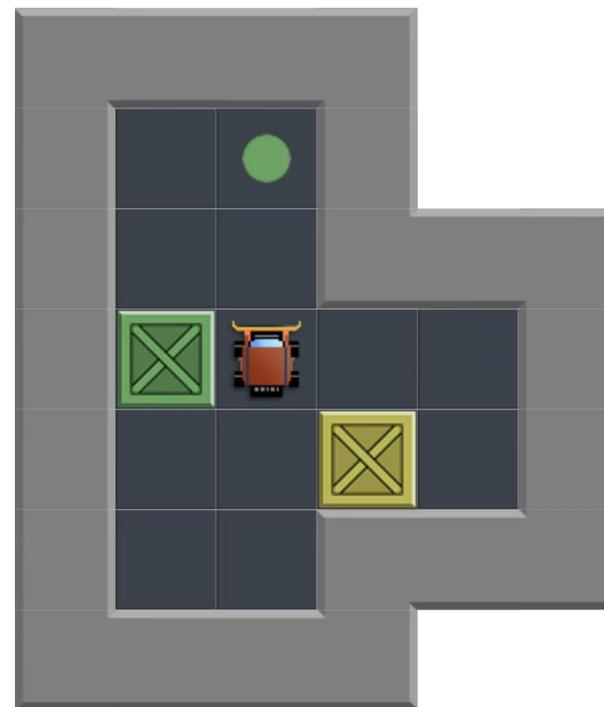
NP-complete

PSPACE-complete



魔方类

8			4		6			7
						4		
	1					6	5	
5		9		3		7	8	
				7				
	4	8		2		1		3
	5	2					9	
		1						
3			9		2			5



推箱子与滑块类

# 魔方类玩具属于 P 类问题

**魔方问题：**任给一种规则魔方的一个乱态，用通用的算法判定此乱态下能否还原。

Let  $G = \langle S \rangle \leq \text{Sym}(\Omega)$  . Then the following tasks can be computed by deterministic polynomial-time algorithms:

(a) .....

(b) Given  $h \in \text{Sym}(\Omega)$  , test whether  $h \in G$  .

A. Seress, **Permutation Group Algorithms**,

Cambridge University Press, (2002) Page 49

“But once people reach that level of mastery with the cube, they often find that their solution strategies are equally effective for solving virtually all the copycat permutation puzzles that it inspired. And, frankly, at that point this kind of permutation puzzle begins to lose its thrill.”

**Simple Groups at Play**, *Scientific American*, July 2008, 84-89

# 推箱子问题是PSPACE完全的

**推箱子问题：**任给一个推箱子关卡，用一个通用的算法判定关卡是否有解。

1997年，University of Alberta 的 Joseph Culberson 率先证明了推箱子是 PSPACE 完全的，采用直接归约为图灵机的方法。

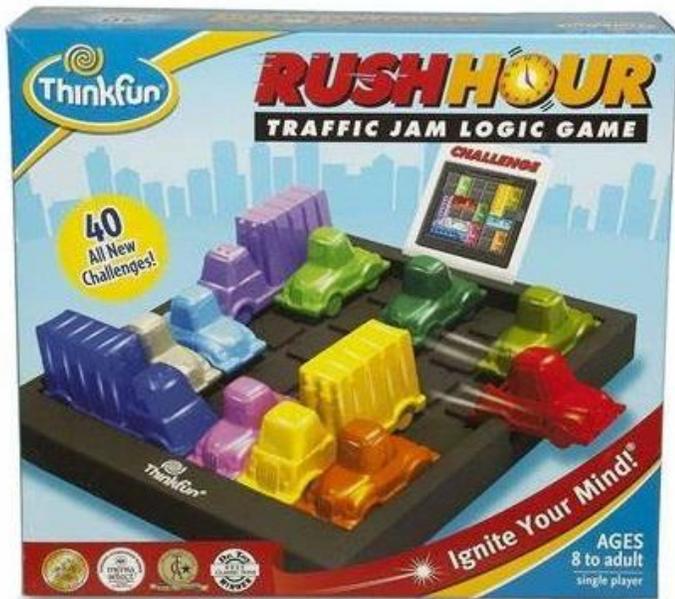
2005年，MIT 的 Robert Hearn 和 Erik Demaine 教授提出了一个称为 NCL 的框架，给出了推箱子是 PSPACE 完全的新证明\*。

\* R. A. Hearn, E. D. Demaine, PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation, *Theoretical Computer Science*, (2005), **343**, 72-96.



# PSPACE完全的数学玩具的其它典型代表

滑块类玩具：如华容道。  
航天员叶光富在天和核心舱在轨玩华容道。



限制了方向的滑块类：Rush Hour，又称汽车华容道。2021年，**Erik Demaine**团队证明了  $1 \times 1$  的 Rush Hour 的难度也是 PSPACE 完全的。推箱子和这几类智力玩具之间有一些深刻且有趣的内在联系。

## 5 推箱子与人工智能

我们举办的在线推箱子比赛是一个“开卷”的比赛，会不会有人“作弊”？

实际上，由于比赛关卡太难，甚至出现过在为期三个星期的比赛中，只有一人过关的情况，如第101期。



《长驱直入vs寸步难行》

作者：(西班牙) Jordi Domenech

(捷克) Premysl Zika

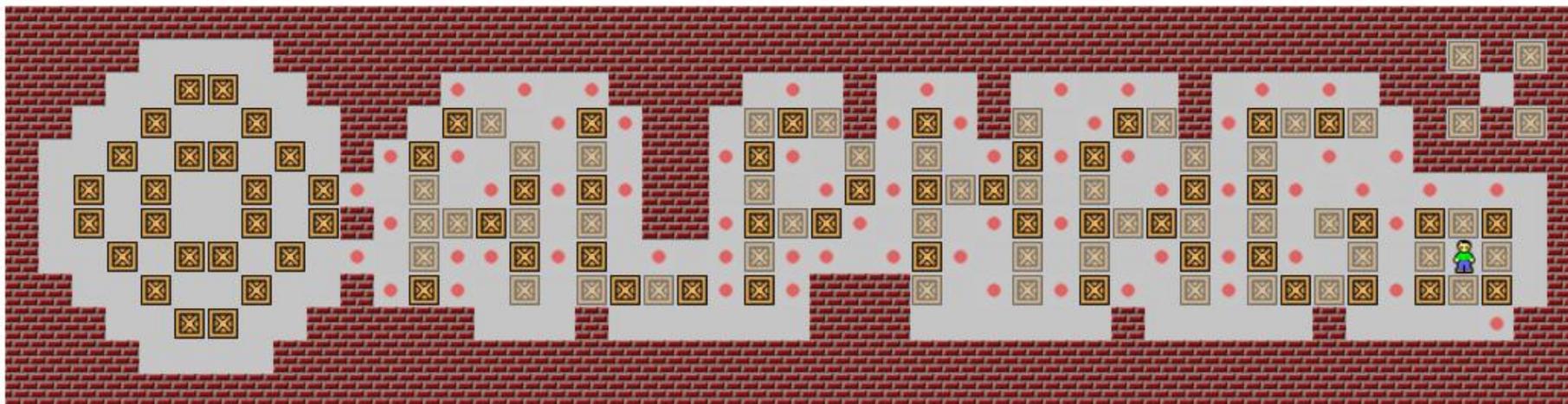
(美国) Anian Wu

Order	Time	ID	Country	#Moves	#Pushes
1	2017-08-18 10:07:23	cjcjc		10634	2973
2	2017-08-18 13:58:17	cjcjc		6948	1815



只有“超级”陈锦超 (cjcjc) 一人解出。

# 2016年3月第83期比赛关卡：AlphaGo



《阿尔法狗》作者：邑明



邑明，35岁，北京人，网名麦英，程序员。20年前与推箱子结下了不解之缘，开始着手研究起推箱子的人工智能求解程序，大学也因此选择了智能与科学专业。现将人工智能开发思维融入到了工作与生活中。

这一关卡也是我们向人工智能提出的挑战。

# 人工智能可以在推箱子上战胜人类吗？



1997年，IBM 的 Deep Blue 战胜国际象棋大师卡斯帕罗夫 (3.5比2.5)



2016年，Google DeepMind 的 AlphaGo 战胜围棋九段李世石 (4 比 1)

20XX年，电脑可以比人更快地解出高难度推箱子关卡吗？

谢谢！